Uitwerkingen oefenopdrachten WEX6

Marc Bremer

August 10, 2009

Serie opgaven Markov ketens behandeld in college

Contact
Dit document is samengesteld door onderwijsbureau Bijles en Training.
Wij zijn DE expert op het gebied van bijlessen en trainingen in de exacte vakken, van VMBO tot universiteit. Zowel voor individuele lessen op maat als voor doelgerichte groepstrainingen die je voorbereiden op een toets of tentamen.
Voor meer informatie kun je altijd contact met ons opnemen
via onze website: **http://www.wiskundebijlessen.nl**
of via e-mail: **marc_bremer@hotmail.com**.

1)

$$\begin{array}{ccccccc}
0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7
\end{array}$$

2a)
$$\begin{array}{ccc}
0.90 & 0.05 & 0.05 \\
0.10 & 0.80 & 0.10 \\
0.10 & 0.20 & 0.70
\end{array}$$

2b) Na 1 week:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 0.90 & 0.05 & 0.05 \\
 & & & 0.10 & 0.80 & 0.10 \\
 & & & 0.10 & 0.20 & 0.70 \\
\hline
50 & 20 & 30 & 50 & 24.5 & 25.5
\end{array}$$

Na 2 weken:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 0.90 & 0.05 & 0.05 \\
 & & & 0.10 & 0.80 & 0.10 \\
 & & & 0.10 & 0.20 & 0.70 \\
\hline
50 & 30.5 & 19.5 & 50 & 27.2 & 22.8
\end{array}$$

2c) We moeten oplossen:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 0.90 & 0.05 & 0.05 \\
 & & & 0.10 & 0.80 & 0.10 \\
 & & & 0.10 & 0.20 & 0.70 \\
\hline
\text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{a} & \text{b} & \text{c}
\end{array}$$

Dit geeft de vergelijkingen:
$0.90a + 0.10b + 0.10c = a$
$0.05a + 0.80b + 0.20c = b$
$0.05a + 0.10b + 0.70c = c$
aangevuld met:
$a + b + c = 100$

Uit de eerste vergelijking:
$a = b + c$
Invullen in de tweede:

$c = 0.6b$
waarmee de vorige vergelijking wordt:
$a = 1.6b$
Beide invullen in de aanvullende vergelijking:
$3.2b = 100$
en dus: $b = 31.25$, $a = 50$, $c = 18.75$

3a) Er zijn vier mogelijke toestanden, zoals samengevat in onderstaande tabel:

aantal defecte machines	besteedde tijd reparatie
0	0
1	0
1	1
2	1

De bijbehorende overgangsmatrix wordt:

$$\begin{array}{cccc} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

3b) We moeten oplossen:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ & & & & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{array}$$

Dit geeft de vergelijkingen:
$0.8a + 0.8c = a$
$0.2a + 0.2c + d = b$
$0.8b = c$
$0.2b = d$
aangevuld met:
$a + b + c + d = 1$

Uit de eerste vergelijking:
$0.8c = 0.2a$, dus $a = 4c$
Met de derde vergelijking wordt dit: $a = 3.2b$
alle vergelijkingen invullen in de aanvullende vergelijking:

$3.2b + b + 0.8b + 0.2b = 5.2b = 1$
en dus: $b = \frac{5}{26}$, $a = \frac{16}{26}$, $c = \frac{4}{26}$, $d = \frac{1}{26}$

3c) $30000 \cdot \frac{1}{26} = 1154$ euro per periode.

4a)

$$\begin{array}{cccccc} & m1 & m2 & m3 & m4 & m5 \\ m1 & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ m2 & 0.20 & 0 & 0.80 & 0 & 0 \\ m3 & 0.50 & 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ m4 & 0.75 & 0.95 & 0 & 0 & 0.25 \\ m5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

4b)

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0.20 & 0 & 0.80 & 0 & 0 \\ & & & & & 0.50 & 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ & & & & & 0.75 & 0.95 & 0 & 0 & 0.25 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 20 & 30 & 30 & 15 & 5 & 38.25 & 19 & 24 & 15 & 3.75 \end{array}$$

4c) Er zijn 5 procent van 10000 lampen die a 12 euro het stuk vervangen worden. Dat is $10000 \cdot 0.05 \cdot 12 = 6000$ euro. Daarnaast zijn er 38.25 min 5 procent van 10000 lampen die stuk zijn gegaan. Dat is $10000 \cdot 0.3325 \cdot 15 = 49875$ euro.

4d)

$$\begin{array}{cccc} & m1 & m2 & m3 \\ m1 & 0.05 & 0.95 & 0 \\ m2 & 0.20 & 0 & 0.80 \\ m3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

4e) We moeten oplossen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0.05 & 0.95 & 0 \\ & & & 0.20 & 0 & 0.80 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \hline a & b & c & a & b & c \end{array}$$

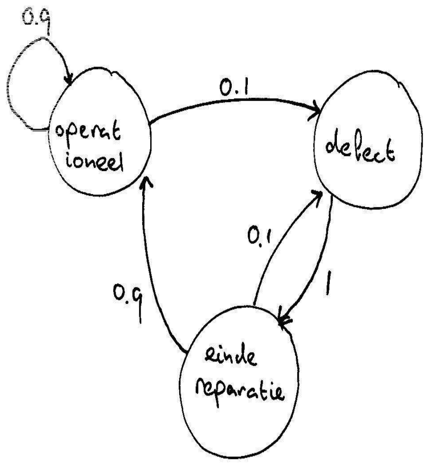
Dit geeft de vergelijkingen:
$0.05a + 0.20b + c = a$
$0.95a = b$
$0.80b = c$
aangevuld met:
$a + b + c = 100$

De tweede en derde vergelijking invullen in de aanvullende vergelijking:

$1.05b + b + 0.80b = 2.85b = 1$
en dus: $b = 0.351$, $a = 0.369$, $c = 0.281$

4f) Net als bij vraag c: $10000 \cdot 0.281 \cdot 12 + 10000 \cdot (0.351 - 0.281) \cdot 15 = 44220$

5a)



5bc)

			0.90	0.10	0
			0	0	1
			0.9	0.1	0
o	d	r	o	d	r

Dit geeft de vergelijkingen:
$0.90o + 0.90r = o$
$d = r$
aangevuld met:
$o + d + r = 1$
Dus:
$r = \frac{1}{11}$
$d = \frac{1}{11}$
$e = \frac{9}{11}$

5d) Van hieruit kunnen we de terugkeertijden berekenen. Stel bijvoorbeeld dat er 10 procent kans is dat ik in een bepaalde toestand ben. Dan moet ik dus 1 van de 10 stappen daar gemiddeld aanwezig zijn. En duurt een rondje dus gemiddeld 10 stappen.

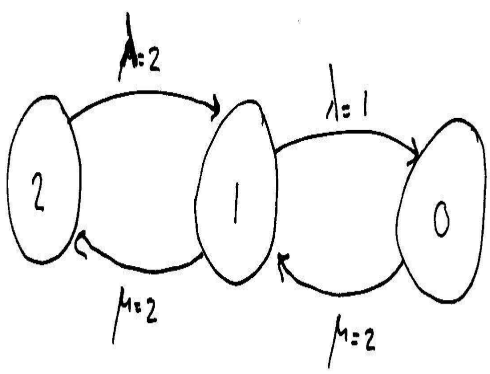
$\mu_{rr} = \frac{1}{\frac{1}{11}} = 11$
$\mu_{dd} = \frac{1}{\frac{1}{11}} = 11$
$\mu_{oo} = \frac{1}{\frac{9}{11}} = \frac{11}{9}$

5e) $\mu_{od} = 1 + 0.90\mu_{od}$
$\mu_{or} = 1 + 0.90\mu_{or} + 0.10\mu_{dr}$
$\mu_{do} = 1 + \mu_{ro}$
$\mu_{dr} = 1$
$\mu_{ro} = 1 + 0.10\mu_{do}$
$\mu_{rd} = 1 + 0.90\mu_{od}$

Dit geeft achtereenvolgens (ga dit na !):
$\mu_{dr} = 1$
$\mu_{or} = 11$
$\mu_{od} = 10$
$\mu_{rd} = 10$
$\mu_{ro} = \frac{11}{9}$
$\mu_{do} = \frac{20}{9}$

5f) Bij Markov-ketens heeft alleen de huidige situatie invloed op het toekomstige verloop. We zitten vandaag in toestand o. Dus duurt het 10 dagen voor we in de toestand d(efect) terecht komen zal de machine dus nog 9 dagen functioneren.

6)



Dit is een continue-tijd Markov-keten. (Uiteraard kan deze opgave ook met wachttijd-theorie opgelost worden.) De evenwichtsvergelijkingen worden:
$2p_0 = 2p_1$
$2p_1 + 1p_1 = 2p_0 + 2p_2$
$2p_2 = p_1$
En natuurlijk:
$p_0 + p_1 + p_2 = 1$
Door de eerste en de derde vergelijking in de laatste in te vullen volgt:
$p_1 + p_1 + 0.5p_1 = 2.5p_1 = 1$
Hieruit volgt voor de kansen: $p_1 = \frac{2}{5}$, $p_2 = \frac{1}{5}$, $p_0 = \frac{2}{5}$.