Uitwerkingen oefenopdrachten WEX6

Marc Bremer

August 9, 2009

Serie 1: Wachttijdtheorie

Contact
Dit document is samengesteld door onderwijsbureau Bijles en Training.
Wij zijn DE expert op het gebied van bijlessen en trainingen in de exacte vakken, van VMBO tot universiteit. Zowel voor individuele lessen op maat als voor doelgerichte groepstrainingen die je voorbereiden op een toets of tentamen.
Voor meer informatie kun je altijd contact met ons opnemen
via onze website: **http://www.wiskundebijlessen.nl**
of via e-mail: **marc_bremer@hotmail.com**.

1a) De poissonverdeling geeft de kans op een bepaald aantal aankomsten binnen een bepaalde tijdsduur. We gaan dus met deze verdeling kijken naar de kans dat er binnen een half uur geen vliegtuig aankomt.
$P(\underline{k}=k)=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$, dus
$P(\underline{k}=0)=\frac{(5\cdot 0.5)^0}{0!}e^{-5\cdot 0.5}=0.082.$

1b) Wat er in het verleden is gebeurd is niet relevant, dus het antwoord is hetzelfde als bij a) !

1c) De cumulatieve exponentiele verdeling vertelt je wat de kans is op een aankomst binnen een bepaald tijdsinterval. We willen dat een vliegtuig binnenkomt binnen een half uur, maar NIET binnen een kwartier. Dus we berekene:
$F(0.5) - F(0.25) = (1 - e^{-5\cdot 0.5}) - (1 - e^{-5\cdot 0.25}) = 0.2044$

1d) $P(\underline{k} = 4) = \frac{(5\cdot 1)^4}{4!} e^{-5\cdot 1} = 0.1755.$

1e) $P(\underline{k} \geq 3) = 1 - P(\underline{k} = 2) - P(\underline{k} = 1) - P(\underline{k} = 0)$
$= 1 - \frac{(5\cdot 1)^2}{2!} e^{-5\cdot 1} - \frac{(5\cdot 1)^1}{1!} e^{-5\cdot 1} - \frac{(5\cdot 1 f)^0}{0!} e^{-5\cdot 1} = 0.8754$

2) 1 grote kraan: dit is een M/M/1/∞/∞ rij.
$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3.5}} = 0.5833$
$E_r(n) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.5833^2}{1-0.5833} = 0.8165$
$E_r(t) = \frac{E_r(n)}{\lambda} = \frac{0.8165}{\frac{1}{6}} = 4.899$ uur.

2 kleine kranen: dit is een M/M/2/∞/∞ rij.
$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}} = 1.1667$
$P_0 = \frac{1}{\Sigma_{k=0}^{s-1}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right) + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)}} = \frac{1}{\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{1!(2-\rho)}} = 0.2631$
$E_r(n) = \frac{\rho^{s+1} P_0}{(s-1)!(s-\rho)^2} = \frac{\rho^3 0.2631}{(1)!(2-\rho)^2} = 0.6017$
$E_r(t) = \frac{E_r(n)}{\lambda} = \frac{0.6017}{\frac{1}{6}} = 3.6103$ uur.
Kortom, de vervanging van 1 grote kraan door 2 kleine levert
een besparing op de gemiddelde wachttijd op van ongeveer 27 procent.

3a) Dit is een M/M/4/∞/∞ rij.
$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{125}{60} = 2.0833$
$P_0 = \frac{1}{\Sigma_{k=0}^{s-1}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right) + \frac{\rho^s}{s!(s-\rho)}} = \frac{1}{\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3!(4-\rho)}} = 0.1191$
$P(\bar{n} \geq 4) = 1 - P_3 - P_2 - P_1 - P_0 = 1 - \frac{\rho^3}{3!} P_0 - \frac{\rho^2}{2!} P_0 - \frac{\rho^1}{1!} P_0 - P_0 = 0.1948$

3b) $E_r(n) = \frac{\rho^{s+1} P_0}{(s-1)!(s-\rho)^2} = \frac{\rho^5 0.1395}{3!(4-\rho)^2} = 0.2120$

3c) $E(n) = E_r(n) + \rho = 0.2120 + 2.0833 = 2.2953$

3d) Het verwachte aantal auto's dat op een bepaald moment geholpen wordt is $2.2953 - 0.2120 = 2.0833$.
Dus het verwachte aantal vrije loketten is $4 - 2.0833 = 1.9167$

3e) Nee, het feit dat een loket GEMIDDELD gesproken nooit gebruikt wordt, betekent niet dat het NOOIT gebruikt wordt. Het zal dan blijkbaar alleen bij piekbelasting gebruikt worden.

4) Dit is een M/M/1/∞/∞ model, met $\lambda = 10$ en μ onbekend.
Per uur zijn de loonkosten 50μ.
Het verwachte aantal auto's in het systeem is het makkelijkst op te schrijven als je de formule uit het boek gebruikt en niet die van het formuleblad.
Dit wordt $E_(n) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{10}{\mu-10}$.
De kosten voor het wachten worden dus $70 \cdot \frac{10}{\mu-10} = \frac{700}{\mu-10}$.
De totale kosten worden dus $K = 50\mu + \frac{700}{\mu-10}$. Als we dit willen optimaliseren moeten we differentieren en gelijkstellen aan 0.
$K' = 50 - \frac{700}{(\mu-10)^2} = 0$.
$\frac{700}{(\mu-10)^2} = 50$
$(\mu - 10)^2 = 14$
$\mu - 10 = 3.74$
$\mu = 13.74$

Serie 2: Wachttijdtheorie / Markov-ketens

5a)

		naar	
		1	2
van	1	0.6	0.4
	2	0.4	0.6

5b) We moeten oplossen:

		0.6	0.4
		0.4	0.6
e	t	e	t

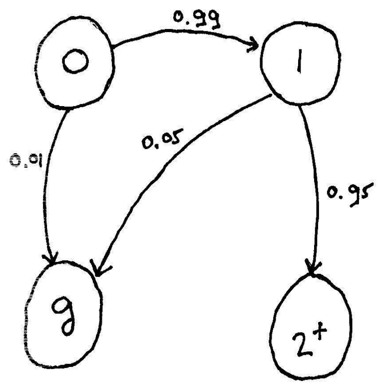
Dit geeft de vergelijking:
$0.6e + 0.4t = e$
aangevuld met:
$e + t = 1$
Door voor t $1 - e$ in te vullen vinden we:
$e = t = 0.5$.

5c) Er zijn 10 mogelijke combinaties van beginvoorraad en aantal bestellingen, elk met kans 0.1, en die hebben elk hun eigen kosten:

Begintoestand	Kans	Kosten
1-0	0.1	50
1-1	0.1	0
1-2	0.1	200
1-3	0.1	400
1-4	0.1	600
2-0	0.1	100
2-1	0.1	50
2-2	0.1	0
2-3	0.1	200
2-4	0.1	400

De verwachtingswaarde bereken je door kolom 2 met kolom 3 te vermenigvuldigen. Hier komt uit als verwachte kosten 200 euro per periode.

6a)



6b)

$$\begin{array}{cc|cccc} & & & \text{naar} & & \\ & & g & 2+ & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{van} & & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 \\ & & 0.01 & 0 & 0.99 & 0 \end{array}$$

6c) De begintoestand is (0 0 0 1).
Na 1 periode is de toestand:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 \\ & & & & 0.01 & 0 & 0.99 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0.01 & 0 & 0.99 & 0 \end{array}$$

Na 2 periodes is de toestand:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 \\ & & & & 0.01 & 0 & 0.99 & 0 \\ \hline 0.01 & 0 & 0.99 & 0 & 0.0595 & 0.945 & 0 & 0 \end{array}$$

Dus de kans is 0.0595.

7a) Dit is een $M/M/3/3/\infty$ rij.
In feite zijn er drie loketten, met bij ieder loket een onderdeel. We zeggen dat een bediening is afgerond als de door de klant gekochte onderdeel weer is aangevuld. Dan pas kan immers een volgende klant weer aan dat loket een onderdeel kopen.
De bedieningsduur is dus de besteltijd.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{4} = 1.5$

$P_0 = \frac{1}{\Sigma_{k=0}^{s}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)} = \frac{1}{\frac{\rho^0}{0!}+\frac{\rho^1}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}} = 0.239$

$P_3 = \frac{\rho^n}{n!}P_0 = \frac{1.5^3}{3!}0.239 = 0.134$

7b) Het verwachte aantal klanten dat 'bediend' wordt is
$E(n) = \rho(1 - P_3) = 1.5(1 - 0.134) = 1.30$
De aanwezige voorraad is dus 3-1.14=1.86 onderdeel's.

8) Dit is een $M/G/1/\infty/\infty$ rij.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{1}} = \frac{2}{3}$

$E_r(n) = \frac{(\lambda\sigma)^2+\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2\left(1-\frac{2}{3}\right)} = 0.708$
$E_r(t) = \frac{E_r(n)}{\lambda} = \frac{0.708}{\frac{2}{3}} = 1.06$ dag.
$E(t) = E_r(t) + \frac{1}{\mu} = 1.06 + \frac{1}{1} = 2.06$ dag.
De tweede vraag is een beetje flauw. Iedere 3 dagen krijgt de medewerker 2 offertes binnen, waar hij per stuk naar verwachting 1 dag mee bezig is.
De fractie tijd is dus $\frac{2}{3}$.

Serie 3: Markov-ketens / goal programming

9a) Het is belangrijk zeer duidelijk aan te geven welke toestanden er zijn en wat de betekenis is van iedere toestand. Welnu: de toestand geeft aan het aantal kilometers dat een wiellager op een bepaalde plaats op de vrachtwagen heeft afgelegd vlak voor een keuring.

	20000	40000	60000	80000	100000
20000	0.01	0.99	0	0	0
40000	0.10	0	0.90	0	0
60000	0.30	0	0	0.70	0
80000	0.50	0	0	0	0.50
100000	1	0	0	0	0

9b) We moeten oplossen:

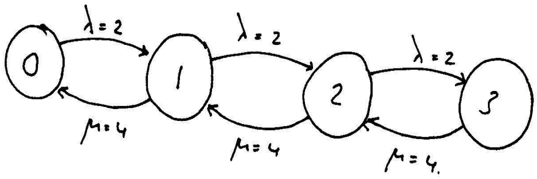
$$\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & 0.01 & 0.99 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0.10 & 0 & 0.90 & 0 & 0 \\ & & & & & 0.30 & 0 & 0 & 0.70 & 0 \\ & & & & & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \end{array}$$

Dit geeft:
$0.01a + 0.10b + 0.30c + 0.50d + e = a$
$0.99a = b$
$0.90b = c$
$0.70c = d$
$0.50d = e$
Daarnaast hebben we natuurlijk altijd de vergelijking:

$a+b+c+d+e=1$
De eerste vijf vergelijkingen geven, in deze volgorde:
$d=2e$
$c=1.43d=2.86e$
$b=1.11c=3.17e$
$a=1.01b=3.21e$
Hieruit volgt met behulp van de laatste vergelijking:
$3.21e+3.17e+2.86e+2e+e=12.24e=1$, en dus
$(a,b,c,d,e)=(0.262,0.259,0.233,0.163,0.082)$

9c) Het bedrijf heeft 400 wielen waarvan de leeftijdsverdeling door de stationaire verdeling gegeven wordt:
$400\cdot(0.262,0.259,0.233,0.163,0.082)=(105,104,93,65,33)$.
Voor 105 wiellagers wordt dit dus de eerste keuring, voor 104 de tweede etc.
Van de 105 wiellagers zijn er 33 afkomstig van de vervanging bij 100000 km, en de overige $105-33=72$ zijn vervanging van afgekeurde lagers.
De kosten voor het eenmalig langslopen van de lagers worden dus:
$33\cdot 40+72\cdot 130=10680$ euro. Dit gebeurt niet eenmalig maar driemaal per jaar, dus de kosten bedragen $10680\cdot 3=32040$ euro.

10)



Dit is een continue-tijd Markov-keten. (Uiteraard kan deze opgave ook met wachttijd-theorie opgelost worden.) De evenwichtsvergelijkingen worden:
$2p_0 = 4p_1$
$2p_1 + 4p_1 = 2p_0 + 4p_2$
$2p_2 + 4p_2 = 2p_1 + 4p_3$
$4p_3 = 2p_2$
En natuurlijk:
$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$
Nu vervang ik $2p_0$ in de tweede vergelijking door $4p_1$ en dan volgt:
$p_0 = 2p_1 = 4p_2 = 8p_3$
Dit invullen in de laatste vergelijking geeft:
$8p_3 + 4p_3 + 2p_3 + p_3 = 15p_3 = 1$.
Hieruit volgt voor de kansen: $p_1 = \frac{8}{15}$, $p_2 = \frac{4}{15}$, $p_3 = \frac{2}{15}$, $p_4 = \frac{1}{15}$.

11a) We moeten oplossen:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 0.875 & 0.0625 & 0.0625 \\ & & & & 0 & 0.75 & 0.125 & 0.125 \\ & & & & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} \end{array}$$

Dit geeft:
$d = a$
$0.875a + 0.75b = b$
$0.0625a + 0.125b + 0.5c = c$
$0.0625a + 0.125b + 0.5c = d$
Daarnaast hebben we natuurlijk altijd de vergelijking:
$a + b + c + d = 1$
De eerste vergelijking invullen in de tweede geeft:
$0.875d + 0.75b = d \rightarrow 0.25b = 0.875d \rightarrow b = 3.5d$
De eerste en de vorige vergelijking invullen in de derde geeft:
$0.0625d + 0.125 \cdot 3.5d + 0.5c = c \rightarrow 0.5d = 0.5c \rightarrow c = d$
Hieruit volgt met behulp van de laatste vergelijking:
$d + 3.5d + d + d = 6.5d = 1$, en dus
$(a, b, c, d) = (0.1538, 0.5385, 0.1538, 0.1538)$

11b) $0.1538 \cdot 0 + 0.5385 \cdot 1000 + 0.1538 \cdot 3000 + 0.1538 \cdot 6000 = 1923$ euro.

11c) $\mu_{00} = \frac{1}{p_0} = \frac{1}{0.1538} = 6.5$ dagen.

12) De productie van produkt 1 noemen we x_1, die van produkt 2 x_2.
min $(d_1^- + d_2^- + 2d_2^+ + 5d_3^- + 5d_4^-)$
onder de voorwaarden:
$4x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 48$
$4x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 32$
$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 7$
$x_1 + d_4^- - d_4^+ = 10$